3. Η μερική παράγωγος

3.1 Μερική παραγώγιση

Η παράγωγος μιας συνάρτησης $f(x)$ μιας μεταβλητής ορίζεται ως

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ . \tag{3.1}$$

Για συναρτήσεις δύο ή περισσότερων μεταβλητών, αντίστοιχα όρια ορίζονται ως προς οποιαδήποτε από τις μεταβλητές, με τη συνθήκη ότι οι υπόλοιπες μεταβλητές διατηρούνται σταθερές. Για παράδειγμα, αν η $f(x,y)$ είναι μια συνάρτηση των μεταβλητών x και y, το όριο

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ y=\sigma\tau\alpha\theta}}\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,y)}{\Delta x} \tag{3.2}$$

ονομάζεται *μερική παράγωγος της* $f(x,y)$ *ως προς* x και συμβολίζεται με $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ή f_x.

Η $f(x,y)$ έχει δύο πρώτες μερικές παραγώγους, τις

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ y=\sigma\tau\alpha\theta}}\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,y)}{\Delta x}\qquad \text{και}\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ x=\sigma\tau\alpha\theta}}\frac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} \tag{3.3}$$

Παράδειγμα 1

Η $f(x,y)=2xy^2$ έχει ως πρώτες μερικές παραγώγους τις:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2y^2\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2x2y=4xy\ .$$

Παράδειγμα 2

Η $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ έχει ως πρώτες μερικές παραγώγους τις:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x+2y\ .$$

Παράδειγμα 3

Η $f(x,y)=e^x\sin(xy)$ έχει ως πρώτες μερικές παραγώγους τις:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^x\sin(xy)+e^x y\cos(xy)\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=e^x x\cos(xy)\ .$$

Εκτός από τις παραγώγους πρώτης τάξης

$$\frac{\partial f}{\partial x}\qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

παράγωγοι ανώτερων τάξεων επίσης ορίζονται, και υπολογίζονται με περαιτέρω παραγώγιση. Έτσι, οι παράγωγοι δεύτερης τάξης της $f(x,y)$ είναι οι

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \tag{3.4}$$

Παράδειγμα 4

Η $f(x,y)=2xy^2$ (του Παραδείγματος 1) έχει τις εξής μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2y^2\right)=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(4xy\right)=4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(4xy\right)=4x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2y^2\right)=4y$$

Παράδειγμα 5

Η $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ (του Παραδείγματος 2) έχει τις εξής μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x+y\right)=2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x+2y\right)=1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x+2y\right)=2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2x+y\right)=1$$

Παράδειγμα 6

Η $f(x,y)=e^x\sin(xy)$ (του Παραδείγματος 3) έχει τις εξής μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\sin(xy)+e^x y\cos(xy)\right)=e^x\sin(xy)+2e^x y\cos(xy)-e^x y^2\sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x x\cos(xy)\right)=e^x x\cos(xy)+e^x\cos(xy)-e^x xy\sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x x\cos(xy)\right)=-e^x x^2\sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\sin(xy)+e^x y\cos(xy)\right)=e^x x\cos(xy)+e^x\cos(xy)-e^x xy\sin(xy)$$

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα παραδείγματα βρήκαμε:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \tag{3.5}$$

δηλαδή ότι η σειρά με την οποία γίνεται η παραγώγιση (πρώτα ως προς x και μετά ως προς y, ή πρώτα ως προς y και μετά ως προς x) δεν έχει σημασία. Αυτό δεν είναι τυχαίο, αλλά αποδεικνύεται ότι ισχύει πάντοτε αν η συνάρτηση και οι μερικές της παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς στο σημείο όπου υπολογίζεται η μικτή παράγωγος δεύτερης τάξης.

Παράγωγοι ανώτερης τάξης επίσης ορίζονται:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\equiv\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\equiv\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\equiv\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\equiv\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\equiv\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\equiv\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)\equiv\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)\equiv\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}$$

Οι μερικές παράγωγοι συναρτήσεων περισσοτέρων των δύο μεταβλητών ορίζονται με τον ίδιο τρόπο.

3.2 Διαφορικά

Αν η $f(x,y,z)$ είναι μια συνάρτηση των μεταβλητών x, y, z, η έκφραση

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{3.6}$$

ονομάζεται *το ολικό διαφορικό*, ή απλώς *το διαφορικό* της συνάρτησης $f(x,y,z)$. Οι ποσότητες dx, dy και dz είναι τα διαφορικά των x, y, z, αντίστοιχα.

Οι μεταβλητές x, y, z είναι δυνατό να είναι συναρτήσεις άλλων μεταβλητών. Τα dx, dy και dz δεν είναι απαραιτήτως μικρές ποσότητες. Για «πολύ μικρές» μεταβολές dx, dy και dz στις μεταβλητές x, y, z, αντίστοιχα, το διαφορικό df μπορεί να θεωρηθεί ως η προκύπτουσα μεταβολή στην $f(x,y,z)$. Αν $f(x,y,z) =$ σταθ., τότε είναι $df = 0$.

Όσο μικρότερα είναι τα dx, dy και dz, τόσο καλύτερη προσέγγιση είναι το διαφορικό στην αντίστοιχη μεταβολή της $f(x,y,z)$. Αυτό κάνει δυνατή τη χρήση των διαφορικών σε προσεγγιστικούς υπολογισμούς και στην εκτίμηση σφαλμάτων.

Όταν ένας αριθμός μικρών μεταβολών, οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, συμβαίνουν ταυτόχρονα σε ένα σύστημα, το συνολικό αποτέλεσμα είναι ίσο με το άθροισμα των επιμέρους αποτελεσμάτων. Από φυσική άποψη, αυτό ισοδυναμεί με την αρχή της επαλληλίας.

Παράδειγμα 7

Να βρεθεί το διαφορικό της $f(x,y,z) = xy^2/z$.

Επειδή είναι: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{z}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy}{z}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{xy^2}{z^2}$,

έχουμε

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \frac{y^2}{z}dx + \frac{2xy}{z}dy - \frac{xy^2}{z^2}dz = \frac{xy^2}{z}\left(\frac{dx}{x} + \frac{2dy}{y} - \frac{dz}{z}\right).$$

3.3 Παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων

Αν η $f(x,y,z)$ είναι μια συνάρτηση των μεταβλητών x, y, z, και αυτές είναι συναρτήσεις μιας άλλης μεταβλητής, έστω της t, τότε το διαφορικό

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{3.7}$$

διαιρούμενο διά dt δίνει το ρυθμό μεταβολής της $f(x,y,z)$ ως προς την t, ως

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \quad . \tag{3.8}$$

Η $\frac{df}{dt}$ ονομάζεται *ολική παράγωγος* της $f(x,y,z)$ ως προς t. Ο ρυθμός μεταβολής της $f(x,y,z)$ είναι μια επαλληλία τριών όρων, ο καθένας από τους οποίους δίνει το ρυθμό μεταβολής της $f(x,y,z)$ που οφείλεται στη μεταβολή, ξεχωριστά, της κάθε μιας από τις μεταβλητές x, y, z. Αναλυτικότερα, $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της $f(x,y,z)$ ως προς το x

όταν τα y και z διατηρούνται σταθερά, και $\dfrac{dx}{dt}$ είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του x ως προς t. Επομένως, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}$ είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της $f(x,y,z)$ ως προς το χρόνο, λόγω της μεταβολής του x μόνο. Οι άλλοι όροι έχουν αντίστοιχες ερμηνείες. Το άθροισμα δίνει τον ολικό ρυθμό μεταβολής της $f(x,y,z)$ ως προς το χρόνο.

Βεβαίως, με αντικατάσταση των συναρτήσεων $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ στην $f(x,y,z)$, βρίσκουμε τη συνάρτηση $f[x(t), y(t), z(t)] = f(t)$, της οποίας η παράγωγος $\dfrac{df}{dt}$ υπολογίζεται απευθείας.

Παράδειγμα 8

Ένα δοχείο έχει σχήμα κυλίνδρου με ακτίνα βάσης ίση με $r = 1$ m και ύψος $h = 2$ m. Αν η ακτίνα μεταβληθεί κατά 1 % και το ύψος μειωθεί κατά 0,5 %, κατά πόσο % μεταβάλλεται ο όγκος του δοχείου;

Εδώ η συνάρτηση είναι ο όγκος του κυλίνδρου, $V = \pi r^2 h$. Οι μεταβλητές είναι οι r και h. Το διαφορικό της V είναι:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh = 2\pi rh\,dr + \pi r^2\,dh \ .$$

Επομένως η ποσοστιαία μεταβολή του όγκου του κυλίνδρου για μεταβολές $dr/r = 1\%$ στην ακτίνα και $dh/h = -0{,}5\,\%$ στο ύψος, είναι:

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial h}dh = 2\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h} = 2\times 1\,\% - 0{,}5\,\% = 1{,}5\,\% \ .$$

[Τέτοια αποτελέσματα εξάγονται πιο εύκολα με *λογαριθμική παραγώγιση*:
Από τη σχέση $V = \pi r^2 h$ έχουμε $\ln V = \ln\pi + 2\ln r + \ln h$,
$d(\ln V) = d(\ln\pi) + 2d(\ln r) + d(\ln h)$ και επομένως $dV/V = 2dr/r + dh/h$.]

Παράδειγμα 9

Αν στον κύλινδρο του προηγούμενου Παραδείγματος η ακτίνα μεταβάλλεται ως προς το χρόνο με ένα ρυθμό $dr/dt = 0{,}01$ m/s και το ύψος με ρυθμό $dh/dt = 0{,}03$ m/s, με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται ο όγκος του δοχείου τη στιγμή που είναι $r = 1$ m και $h = 2$ m;

Η ολική παράγωγος του όγκου του κυλίνδρου ως προς το χρόνο είναι:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} = 2\pi rh\frac{dr}{dt} + \pi r^2\frac{dh}{dt}$$

από την οποία μπορούμε να βρούμε το ρυθμό dV/dt. Προτιμούμε να βρούμε το ρυθμό ποσοστιαίας μεταβολής του όγκου,

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} = \frac{2}{r}\frac{dr}{dt} + \frac{1}{h}\frac{dh}{dt} .$$

Επειδή είναι $\dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{dt} = 0{,}01\,\mathrm{s}^{-1}$ και $\dfrac{1}{h}\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{0{,}03}{2} = 0{,}015\,\mathrm{s}^{-1}$, έχουμε

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = 2\times 0{,}01 + 0{,}015 = 0{,}035\,\mathrm{s}^{-1}$$

ή 3,5 % ανά δευτερόλεπτο.

Προβλήματα

1 Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης των συναρτήσεων $f(x,y,z)$:

$$xyz \qquad x^2 + yz^2 \qquad x/yz \qquad x\sin y \qquad x^2 + ye^z$$

2 Να βρεθούν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης μερικών από τις συναρτήσεις $f(x,y,z)$ του Προβλήματος 1.

3 Να βρεθούν τα διαφορικά των συναρτήσεων $f(x,y,z)$ του Προβλήματος 1.

Βιβλιογραφία

I. S. Sokolnikoff και R. M. Redheffer, *Μαθηματικά για Φυσικούς και Μηχανικούς*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2001. Κεφ. 5.

M. R. Spiegel, *Ανώτερα Μαθηματικά*. ΕΣΠΙ, Αθήνα 1982. Κεφ. 6, 8.